数理解析研究所講究録 1342 巻 2003 年 82-85

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の $(1,1)$ 次曲線 4 本の配置について

落合啓之 (名古屋大学)　小池健二 (HUMBOLDT 財団奨学研究生)

0.1.　一般の位置にある $(1,1)$ 次曲線 4 本で分岐する、$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆を考えると K3 曲面の 6 次元族が得られ、周期は 6 次元 IV 型領域 $\mathcal{D}$ でパラメタライズされる ([Sh])。従って $(1,1)$ 次曲線 4 本の配置空間は、適当な離散直交群 Γ による商空間 $\mathcal{D}/\Gamma$ と同型になる事が期待される。ここではその配置空間の一つのモデルの構成を考える。

$[s_0 : s_1] \times [t_0 : t_1]$ を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の射影座標とする。$(1,1)$ 次曲線の方程式は

$$(s_0, s_1) X^t(t_0, t_1) = 0 \quad (X \in M_2(\mathbb{C}))$$

と行列を用いて表されるので、4 本の曲線の射影同値類は $M_2(\mathbb{C})^4$ の $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^4$ 同値類として与えられる。ここで $(\mathbb{C}^\times)^4$ は成分毎にスカラー倍として作用し、$(g,h) \in SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ の作用は

$$(g,h) : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C}), \quad X \mapsto gXh$$

を diagonal に作用させたものとする。以下で不変式を計算し、適当な開集合 $U \subset M_2(\mathbb{C})^4$ に対し、商空間 $U/SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^4$ を実現する。

0.2.　$SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ は $V = M_2(\mathbb{C})$ 上の 2 次形式

$$Q(X) = \det X = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

を保ち、群の完全列

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow SO(V,Q) \longrightarrow 1$$

が得られる ([FH])。また、$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の成分を入れ替える involution

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \quad [s_0 : s_1] \times [t_0 : t_1] \mapsto [t_0 : t_1] \times [s_0 : s_1]$$

は involution

$$\tau : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C}), \quad X \mapsto {}^tX$$

を引き起こし、直交群 $O(V,Q)$ は $SO(V,Q)$ と τ で生成される。従って、$SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ の代わりに $O(V,Q)$ または $SO(V,Q)$ の作用を考えれば十分である。

直交群の不変式環は内積によって生成され、特殊直交群の不変式環は内積と行列式によって生成されることが知られている ([FH])。今の場合、$V^4 = M_2(\mathbb{C})^4$ への作用を考えると、10 個の内積

$$q_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \frac{1}{2}(Q(X_i + X_j) - Q(X_i) - Q(X_j)), \quad 1 \le i, j \le 4$$

と行列式

$$\Delta = [X_1, X_2, X_3, X_4] = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}.$$

が得られる。よって、V^4 上の $SO(V,Q)$-不変式の環は $\mathbb{C}[q_{ij},\Delta]$ で与えられ、$O(V,Q)$-不変式の環は $\mathbb{C}[q_{ij}]$ によって与えられる事が分かる。Δ は τ の作用に対して交代的なので $\Delta^2 \in \mathbb{C}[q_{ij}]$ である事に注意する。

次に $(\mathbb{C}^\times)^4$ の作用を考えよう。これにより射影空間 $\mathbb{P}(V)^4 = (V-\{0\})^4/(\mathbb{C}^\times)^4$ が得られ、不変式環に multi-grading が与えられる。つまり、

$$\deg q_{11} = (2,0,0,0), \quad \deg q_{12} = (1,1,0,0), \quad \deg \Delta = (1,1,1,1),$$

等と考える。R_k で次数 (k,k,k,k) の $SO(V,Q)$-不変式が成すベクトル空間を表すと、R_k は

$$\Gamma(\mathbb{P}(V)^4, L^k)^{SO(V,Q)}, \quad L = p_1^*\mathcal{O}(1)\otimes\cdots\otimes p_4^*\mathcal{O}(1)$$

に他ならない。ここで、$p_i : \mathbb{P}(V)^4 \to \mathbb{P}(V)$ は自然な射影であり, $\oplus_{k=0}^\infty \Gamma(\mathbb{P}(V),\mathcal{O}(k))$ を多項式環 $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[a,b,c,d]$ と同一視した。射影多様体 $P = Proj \oplus_{k=0}^\infty R_k$ を考えると、Zariski dense な開集合 $U \subset P$、$U' \subset \mathbb{P}(V)^4$ が存在して $U = U'/SO(V,Q)$ となっている ([DO])。

0.3.　ベクトル空間 R_k を具体的にみてみよう。R_1 は

$$\Delta, \quad q_{ij}q_{kl} \ (\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}).$$

によって生成される。R_2 は $Sym^2 R_1$ 及び

$$q_{ij}q_{jk}q_{ki}q_{ll}, \quad q_{ij}^2 q_{kk}q_{ll}, \quad q_{11}q_{22}q_{33}q_{44}.$$

によって生成される。R_3 には、次の形の元が存在する。

(1)
$$q_{ii}q_{jj}q_{kk}q_{il}q_{jl}q_{kl}.$$

これらの不変式によって不変式環が生成される。

Proposition 1. 環 $R = \oplus_{k=0}^\infty R_k$ は R_1, R_2 及び R_3 によって生成される。

証明の前に記号を用意する。以下、$\deg_k$ で k 番目の変数 X_k に対する次数を表す。つまり、

(2)
$$\deg_k q_{ij} = \delta_{ik} + \delta_{jk},$$

(δ_{ij} は Kronecker の δ) とする。例えば、$F \in R_N$ に対し $deg_k F = N$ である。

次数 N に対する帰納法により、任意の単項式 $F \in R_N$ は、R_1, R_2 の単項式及び (1) の元の積に分解する事を示そう。帰納法の仮定として、$n < N$ ならば単項式 $G \in R_n$ に対し、これが正しいとする。単項式 $F \in R_N$ は

$$\Delta^m \prod_{1\le i\le j\le 4} q_{ij}^{n_{ij}}, \quad (m, n_{ij} \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$$

と書けるが、$\Delta \in R_1$ なので $m=0$ の場合を考えれば十分である。また、一般性を失わずに

(3)
$$n_{11} \ge n_{22} \ge n_{33} \ge n_{44} \ge 0$$

と仮定してよい。

Case 1. $n_{11} \ge n_{22} \ge n_{33} \ge n_{44} > 0$ ならば F は低次の単項式の積に分解する。

Proof. 実際、仮定より F は因数 $q_{11}q_{22}q_{33}q_{44} \in R_2$ を持つ。 □

Case 2. $n_{11} \ge n_{22} \ge n_{33} > n_{44} = 0$ ならば F は低次の単項式の積に分解する。

Proof.

$$\deg_4 F = \deg_3 F \geq 2n_{33} \geq 2$$

より、ある $i \neq 4$ に対し、q_{i4} が F の因数でなければならない。故に

$$\deg_4 F = \deg_i F \geq 2n_{ii} + n_{i4} \geq 3$$

となり、F は $q_{i4}q_{j4}q_{k4}(i,j,k \in \{1,2,3\})$ という形の因数を持つ。i,j,k が全て異なれば、F は因数

$$q_{11}q_{22}q_{33}q_{14}q_{24}q_{34} \in R_3$$

を持つ。そうでない場合、例えば $i=j$ の場合、F は

$$q_{i4}^2 q_{hh} q_{ll} \in R_2, \quad \{i,h,l\} = \{1,2,3\}$$

なる因数を持つ事が分る。 □

Case 3. $n_{11} \geq n_{22} > n_{33} = n_{44} = 0$ ならば F は低次の単項式の積である。

Proof. 等式

$$n_{13} + n_{23} + n_{34} = \deg_3 F = \deg_1 F = 2n_{11} + n_{12} + n_{13} + n_{14},$$
$$n_{14} + n_{24} + n_{34} = \deg_4 F = \deg_2 F = 2n_{22} + n_{12} + n_{23} + n_{24}$$

の両辺を足して $n_{34} \geq n_{11} + n_{22} + n_{12} \geq 2$ を得る。従って、F は因数 $q_{11}q_{22}q_{34}^2 \in R_2$ を持つ。 □

Case 4. $n_{11} > n_{22} = n_{33} = n_{44} = 0$ ならば F は低次の単項式の積である。

Proof. 対称性により、$n_{23} \geq n_{24} \geq n_{34} \geq 0$ と仮定してよい。もし $n_{34} = 0$ であれば

$$2n_{11} + n_{12} + n_{13} + n_{14} = \deg_1 F = \deg_3 F = n_{13} + n_{23},$$
$$2n_{11} + n_{12} + n_{13} + n_{14} = \deg_1 F = \deg_4 F = n_{14} + n_{24}$$

となり、両辺を足して

$$4n_{11} + 2n_{12} + n_{13} + n_{14} = n_{23} + n_{24} \tag{4}$$

を得る。一方

$$2n_{11} + n_{12} + n_{13} + n_{14} = \deg_1 F = \deg_2 F = n_{12} + n_{23} + n_{24} \tag{5}$$

であり、(4) と (5) から $2n_{11} + n_{12} = 0$ となる。しかし、これは $n_{11} > 0$、$n_{12} \geq 0$ に反する。従って常に $n_{34} > 0$ であり、F は因数 $q_{11}q_{23}q_{24}q_{34} \in R_2$ を持つ事が分る。 □

Case 5. $n_{11} = n_{22} = n_{33} = n_{44} = 0$ ならば F は R_1 の元の積に分解する。

Proof. この場合

$$\deg_1 F = n_{12} + n_{13} + n_{14}, \quad \deg_2 F = n_{12} + n_{23} + n_{24},$$
$$\deg_3 F = n_{13} + n_{23} + n_{34}, \quad \deg_4 F = n_{14} + n_{24} + n_{34}$$

となり、等式

$$\deg_1 F + \deg_2 F = \deg_3 F + \deg_4 F$$

より $n_{12} = n_{34}$ を得る。同様に、$n_{13} = n_{24}$、$n_{14} = n_{23}$ が成り立つので

$$F = (q_{12}q_{34})^{n_{12}}(q_{13}q_{24})^{n_{13}}(q_{14}q_{23})^{n_{14}}$$

を得る。 □

以上により、命題は証明された。環 R の τ-不変部分環 R^τ は、R の生成元から Δ を除いたものによって生成される。

0.4.　不変式を用いて affine モデルを考えてみる。$X_1, \cdots X_4$ が定める 4 本の $(1,1)$ 次曲線を H_1, H_2, H_3, H_4 とする。直交群の typical invariant q_{ij} の定める零点は次のような幾何学的な意味付けを持つ

$q_{ii} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; H_i$ は既約

$q_{ij} \neq 0 \; (i \neq j) \;\Leftrightarrow\; H_i \cap H_j$ は異なる 2 点からなる

である。このような配置の全体を $U \subset M_2(\mathbb{C})^4$ とすると、affine 不変式

$$\nu_{ij} = \frac{(q_{ij}q_{kl})^2}{q_{ii}q_{jj}q_{kl}^2}, \quad \mu_{ijk} = \frac{q_{ij}q_{jk}q_{ki}q_{ll}}{q_{11}q_{22}q_{33}q_{44}}$$

は U 上の $O(V,Q) \times (\mathbb{C}^\times)^4$-不変な関数で写像 $U/(O(V,Q) \times (\mathbb{C}^\times)^4) \longrightarrow Z_2$,

$$Z_2 = \left\{ ((\nu_{ij}), (\mu_{ijk})) \in (\mathbb{C}^\times)^{6+4} \;\middle|\; \begin{array}{c} \nu_{ij}\nu_{jk}\nu_{ki} = \mu_{ijk}^2, \\ \nu_{12}\nu_{13}\nu_{14}\nu_{23}\nu_{24}\nu_{34} = \mu_{123}\mu_{234}\mu_{341}\mu_{412} \end{array} \right\}$$

を得る。また

$$U/(SO(V,Q) \times (\mathbb{C}^\times)^4) \cong U/(SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^4)$$

は $\Delta = 0$ で分岐する Z_2 の 2 重被覆として記述できる。

References

[DO] I. Dolgachev and D. Ortland, Point sets in projective spaces and theta functions, Asterisque 165 (1985).

[FH] W. Fulton and J. Harris, Representation Theory, Springer (1991).

[Sh] H. Shiga, the article in this proceeding.